Conjugate (dual) set

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - произвольное непустое множество. Тогда сопряженное к нему множество определяется, как:

пример 1

$S = x_A \in \mathbb{R}^2$

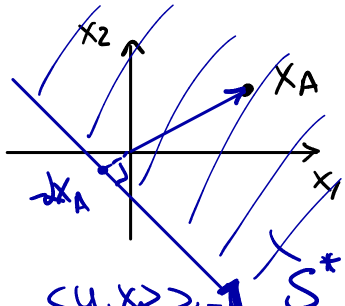
ТУПА:

1) S^* - выпукло

2) $0 \in S^*$

$$\boxed{S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -1 \;\; \forall x \in S\}}$$

$\langle y, x \rangle \geq 0$

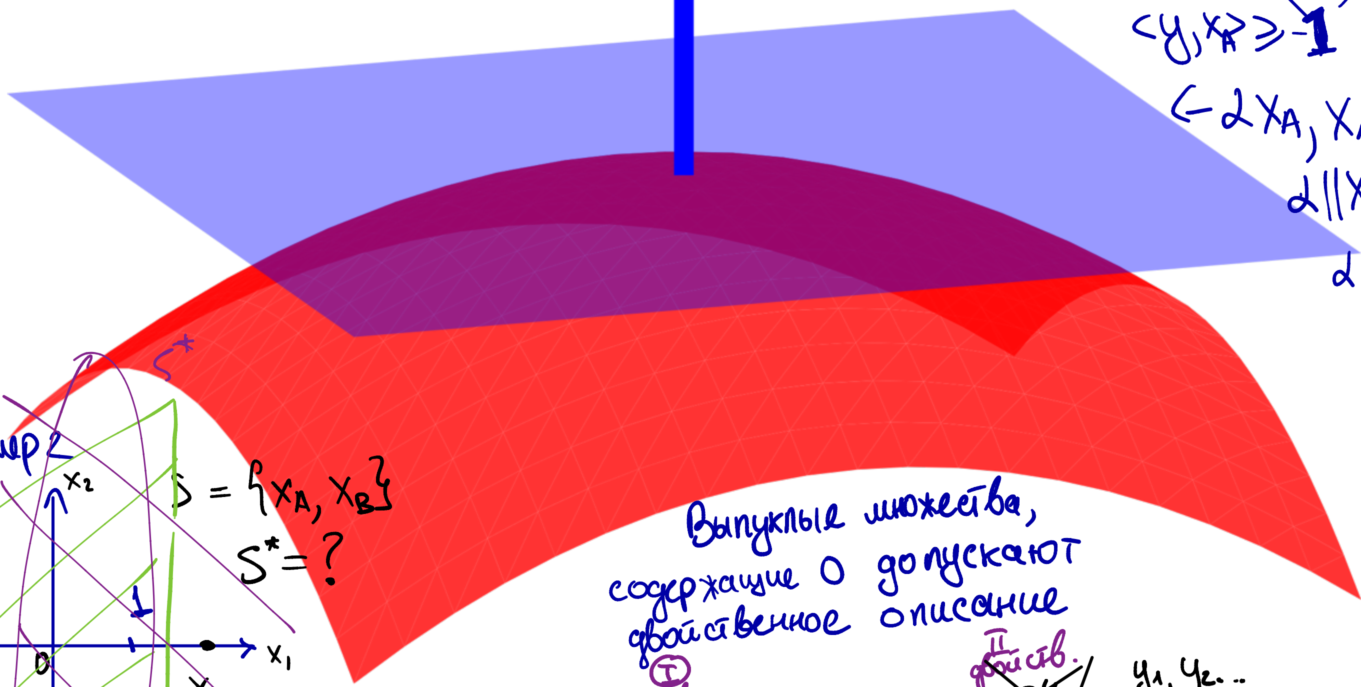


$\langle y, x_A \rangle \geq -1$

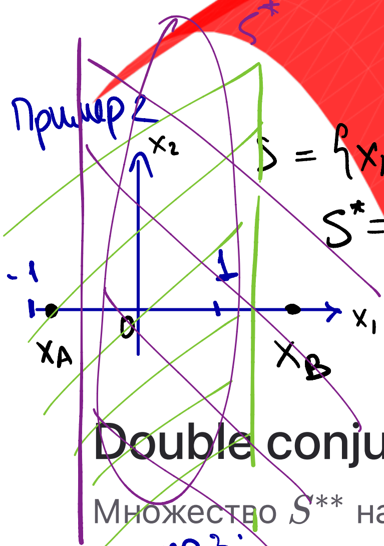
$\langle -\alpha x_A, x_A \rangle \geq -1$

$\alpha \|x_A\|^2 \leq 1$

$\alpha \leq \frac{1}{\|x_A\|^2}$



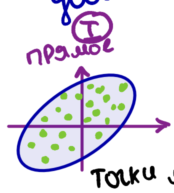
Пример 2

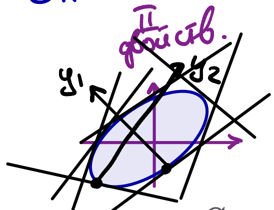


$S = \{x_A, x_B\}$

$S^* = ?$

Выпуклые множества, содержащие 0 допускают двойственное описание



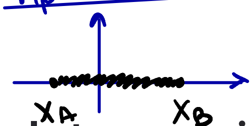


$y_1, y_2 \ldots$ набор гиперплоск. подп.

Double conjugate set

Множество S^{**} называется вторым сопряженным к множеству S, если:

пример 3:



$$\boxed{S^{**} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -1 \;\; \forall x \in S^*\}}$$

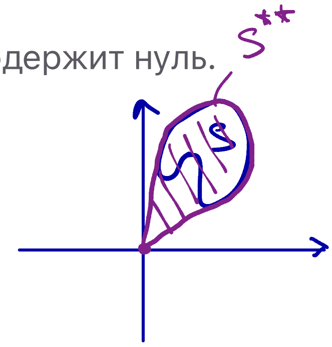
Inter-conjugate and self-conjugate sets

- Множества S_1 и S_2 называются **взаимосопряженными**, если $S_1^* = S_2, S_2^* = S_1$.
- Множество S называется **самосопряженным**, если $S^* = S$.

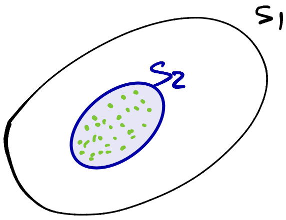
Properties

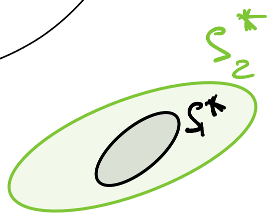
- Сопряженное множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$S^{**} = \overline{\mathbf{conv}(S \cup \{0\})}$$



- Если $S_1 \subseteq S_2$, то $S_2^* \subseteq S_1^*$.





- $$\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)^* = \bigcap_{i=1}^m S_i^*$$

m-конечно

Жадан

- Если S - замкнуто, выпукло, включает 0, то $S^{**} = S$.
- $$S^* = \left(\overline{S}\right)^*$$

Examples

1

Доказать, что $S^* = \left(\overline{S}\right)^*$.

Решение:

- $$S \subset \overline{S} \to \left(\overline{S}\right)^* \subset S^*$$
- Пусть $p \in S^*$ и $x_0 \in \overline{S}, x_0 = \lim\limits_{k \to \infty} x_k$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x) = p^T x$, имеем: $p^T x_k \geq -1 \to p^T x_0 \geq -1$. Значит, $p \in \left(\overline{S}\right)^*$, отсюда $S^* \subset \left(\overline{S}\right)^*$

2

Доказать, что $(\mathbf{conv}(S))^* = S^*$.

Решение:

- $$S \subset \mathbf{conv}(S) \to (\mathbf{conv}(S))^* \subset S^*$$
- Пусть $p \in S^*$, $x_0 \in \mathbf{conv}(S)$, т.е. $x_0 = \sum\limits_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in S, \sum\limits_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$.

  Значит, $p^T x_0 = \sum\limits_{i=1}^k \theta_i p^T x_i \geq \sum\limits_{i=1}^k \theta_i (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$. Значит, $p \in (\mathbf{conv}(S))^*$, отсюда $S^* \subset (\mathbf{conv}(S))^*$

3

Доказать, что если $B(0,r)$ - шар радиуса r по некоторой норме с центром в нуле, то $(\underbrace{B(0,r)}_{X})^* = \underbrace{B(0,1/r)}_{Y}$.

$X^* \subset Y$ I

II $Y \subset X^*$

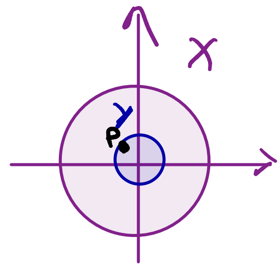
Решение:

- Пусть $B(0,r) = X, B(0,1/r) = Y$. Возьмем вектор нормали $p \in X^*$, тогда для любого $\boxed{x \in X : p^T x \geq -1.}$
- Из всех точек шара X возьмем такую $x \in X$, что скалярное произведение её $\langle p,x \rangle$ на p: $p^T x$ было бы минимально, тогда это точка $\boxed{x = -\frac{p}{\|p\|} r}$

I

$$p^T x = p^T \left(-\frac{p}{\|p\|} r \right) = -\|p\| r \geq -1$$

$$\boxed{\|p\| \leq \frac{1}{r}} \in Y$$



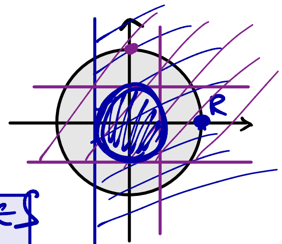
Значит, $X^* \subset Y$.

II

- Теперь пусть $p \in Y$. Нам надо показать, что $\boxed{p \in X^*}$, т.е. $\langle p, x \rangle \geq -1$. Достаточно применить неравенство Коши - Буняковского:

дано p — маленький

$$\|\langle p, x \rangle\| \leq \|p\| \|x\| \leq \frac{1}{r} \cdot r = 1$$



Последнее исходит из того, что $p \in B(0,1/r)$, а $x \in B(0,r)$.

Значит, $Y \subset X^*$.

$$\boxed{S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1\}} \ \forall x \in S$$

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda x \in K, \lambda \geq 0\}$$

$$\langle y, \lambda x \rangle \geq -1$$

Dual cones

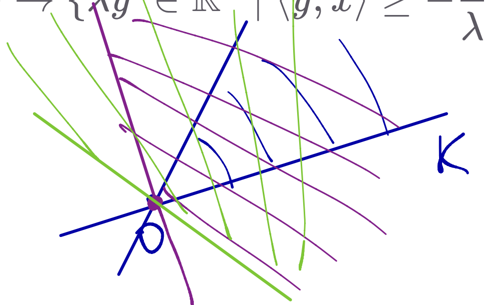
Сопряженным конусом к конусу K называется такое множество K^*, что:

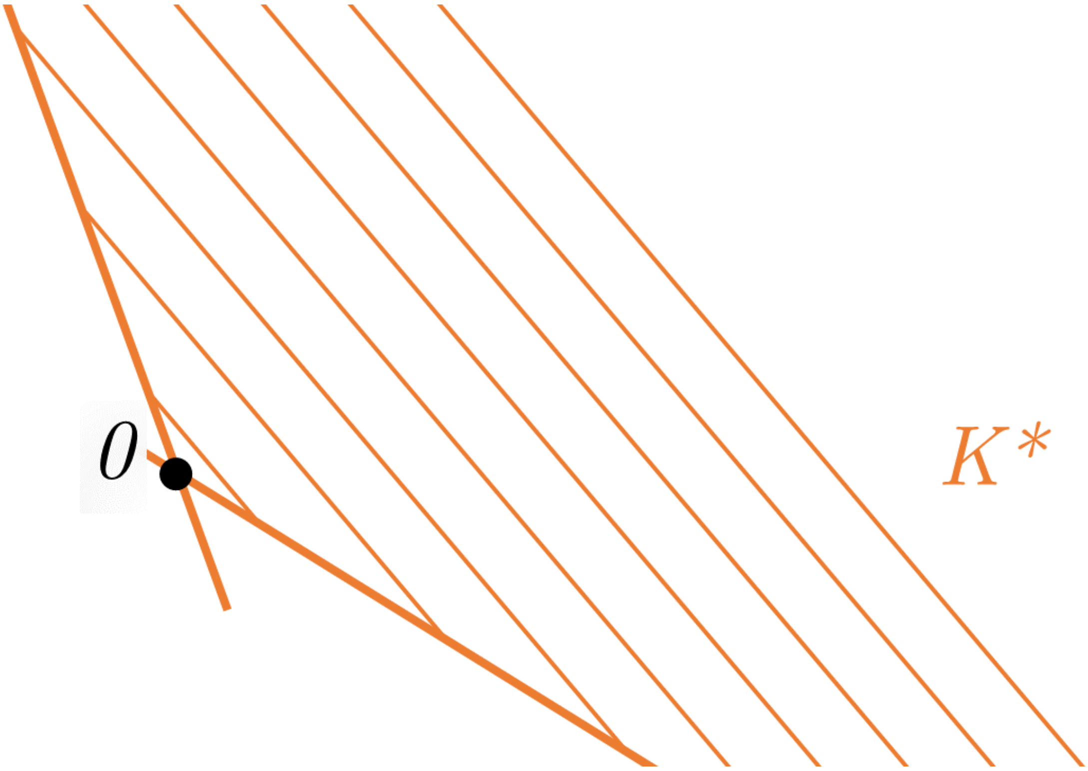
$$\boxed{K^* = \{y \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}}$$

$$\langle y, x \rangle \geq -\frac{1}{\lambda}$$
$$\lambda \to \infty$$

Чтобы показать, что это определение непосредственно следует из теории выше, вспомним, что такое сопряженное множество и что такое конус $\forall \lambda > 0$

$$\{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \ \ \forall x \in S\} \to \{\lambda y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -\frac{1}{\lambda} \ \ \forall x \in S\}$$





Dual cones properties

- Пусть K - замкнутый выпуклый конус. Тогда $\boxed{K^{**} = K}$.
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и конуса $K \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\boxed{(S+K)^* = S^* \cap K^*}$$

- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$, тогда:

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^m K_i\right)^* = \bigcap_{i=1}^m K_i^*}$$

- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$. Пусть также их пересечение имеет внутреннюю точку, тогда:

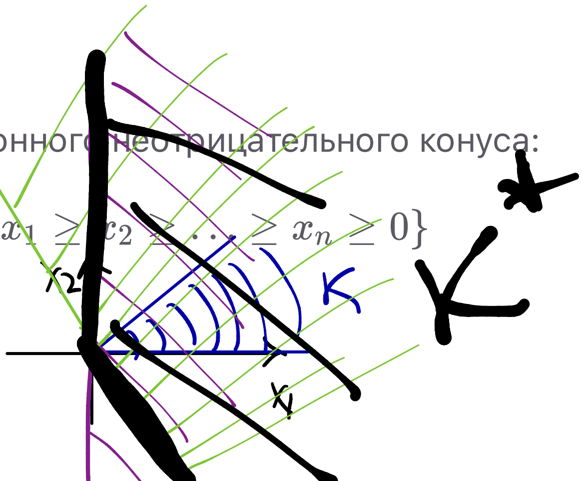
$$\left(\bigcap_{i=1}^m K_i\right)^* = \sum_{i=1}^m K_i^*$$

Examples

Найти сопряженнй конус для монотонного неотрицательного конуса:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0\}$$

Решение: $K^* = ?$



По опр. K^*: $\{y\in\mathbb{R}^n : \langle y,x\rangle \geq 0 \ \forall x\in K\}$

Заметим, что: $\boxed{\sum_{i=1}^n x_i\cdot y_i \geq 0}$ $K^*\in ?$

$$
\sum_{i=1}^n x_i y_i = y_1(x_1 - x_2) + (y_1 + y_2)(x_2 - x_3) + \ldots + (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})(x_{n-1} - x_n)
$$

$x_1y_1 - \cancel{x_2y_1} + \cancel{x_2y_1} + x_2y_2 - \cancel{x_3y_1} - \cancel{x_3y_2} + (y_1+y_2+y_3)(x_3-x_4)$

Так как в представленной сумме в каждом слагаемом второй множитель неотрицательный, то:

$\cancel{x_3y_1} + \cancel{x_3y_2} + x_3y_3$

$$
y_1 \geq 0, \quad y_1 + y_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad y_1 + \ldots + y_n \geq 0
$$

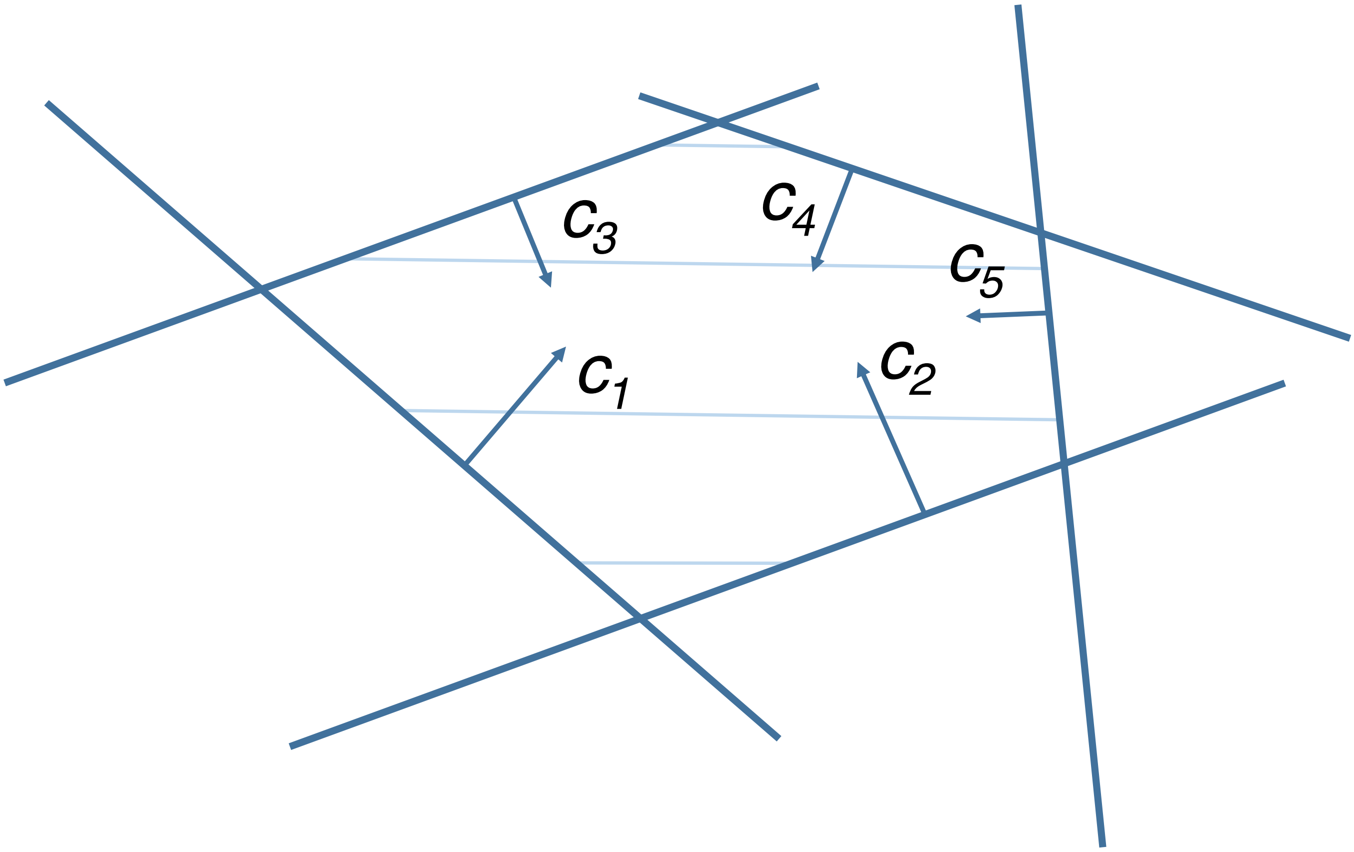
Значит, $\boxed{K^* = \left\{ y \mid \sum_{i=1}^k y_i \geq 0, k = \overline{1,n} \right\}}$

Polyhedra

Множество решений системы линейных неравенств и равенств представляет собой многогранник:

$$
Ax \preceq b, \quad Cx = d
$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, а неравенство - поэлементное.



ТЕОРЕМА:

Пусть $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к многогранному множеству:

$$S = \mathbf{conv}(x_1, \dots, x_k) + \mathbf{cone}(x_{k+1}, \dots, x_m)$$

является полиэдр (многогранник):

$$S^* = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1,k}; \langle p, x_i \rangle \geq 0, i = \overline{k+1,m} \right\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

- Пусть $S = X, S^* = Y$. Возьмем некоторый $p \in X^*$, тогда $\langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1,k}$. В то же время для любых $\theta > 0, i = \overline{k+1,m}$:

  $$\langle p, x_i \rangle \geq -1 \to \langle p, \theta x_i \rangle \geq -1$$

  $$\langle p, x_i \rangle \geq -\frac{1}{\theta} \to \langle p, x_i \rangle \geq 0$$

  Значит, $p \in Y \to X^* \subset Y$.

- Пусть, напротив, $p \in Y$. Для любой точки $x \in X$:

  $$x = \sum_{i=1}^m \theta_i x_i \qquad \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$$

  Значит:

  $$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^m \theta_i \langle p, x_i \rangle = \sum_{i=1}^k \theta_i \langle p, x_i \rangle + \sum_{i=k+1}^m \theta_i \langle p, x_i \rangle \geq \sum_{i=1}^k \theta_i (-1) + \sum_{i=1}^k \theta_i \cdot$$

  Значит, $p \in X^* \to Y \subset X^*$.

5

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу:

$$S = \mathbf{cone}\{(-3, 1), (2, 3), (4, 5)\}$$

Решение:

Используя теорему выше:

$$S^* = \{-3p_1 + p_2 \geq 0, 2p_1 + 3p_2 \geq 0, 4p_1 + 5p_2 \geq 0\}$$

Лемма (теорема) Фаркаша (Фаркаша - Минковского)

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1)\ Ax = b, x \geq 0$$

$$2)\ p^\top A \geq 0, \langle p, b \rangle < 0$$

$Ax = b$ при $x \geq 0$ означает, что b лежит в конусе, натянутым на столбцы матрицы A.

$pA \geq 0,\ \langle p, b \rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором b и конусом из столбцов матрицы A.

СЛЕДСТВИЕ:
Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1)\ Ax \leq b$$

$$2)\ p^\top A = 0, \langle p, b \rangle < 0, p \geq 0$$

Если в задаче линейного программирования на минимум допустимое множество непусто и целевая функция ограничена на нём снизу, то задача имеет решение.
