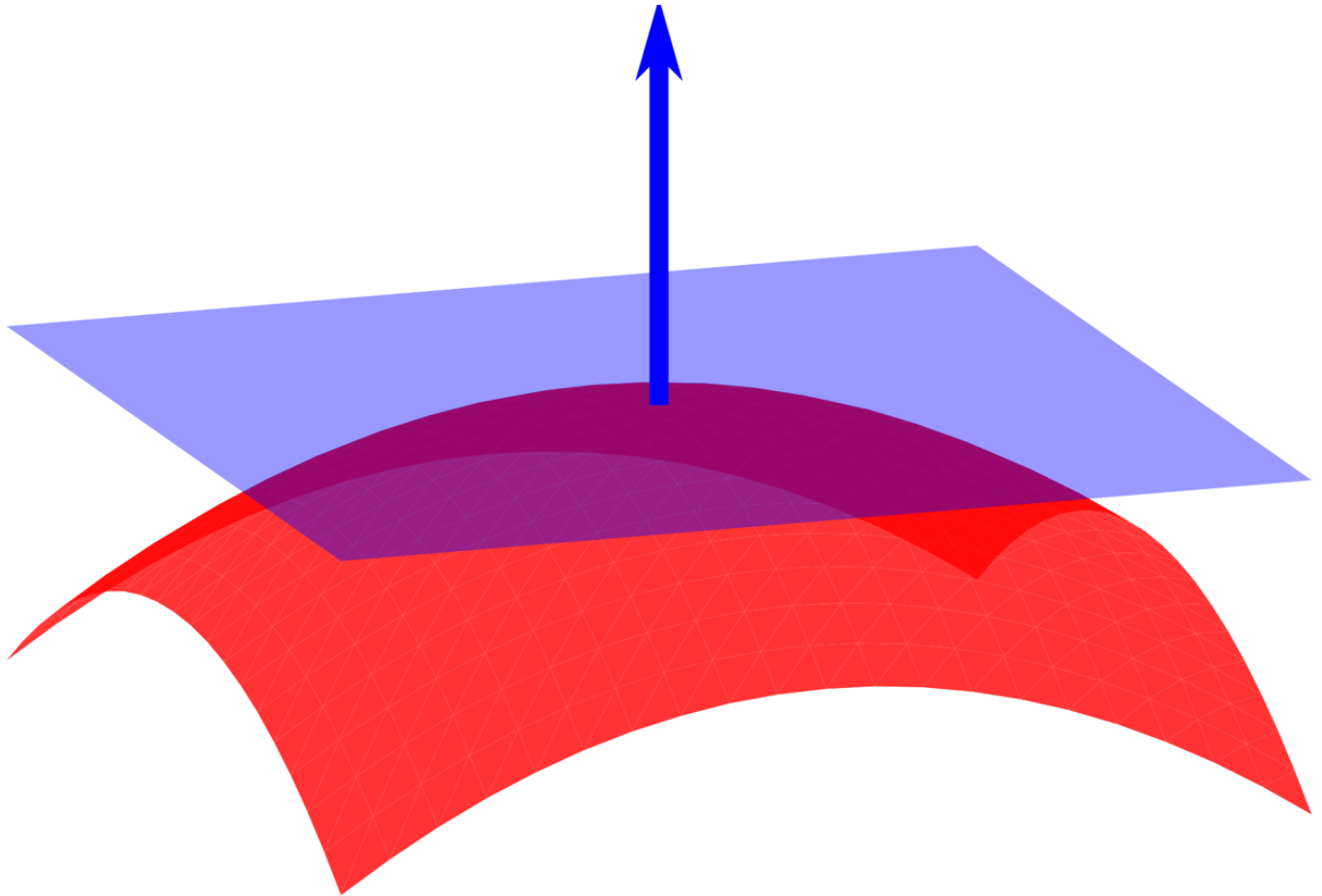


Conjugate (dual) set

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - произвольное непустое множество. Тогда сопряженное к нему множество определяется, как:

$$S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall x \in S\}$$



Double conjugate set

Множество S^{**} называется вторым сопряженным к множеству S , если:

$$S^{**} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall x \in S^*\}$$

Inter-conjugate and self-conjugate sets

- Множества S_1 и S_2 называются **взаимосопряженными**, если $S_1^* = S_2$, $S_2^* = S_1$.
- Множество S называется **самосопряженным**, если $S^* = S$.

Properties

- Сопряженное множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.

- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$S^{**} = \overline{\mathbf{conv}(S \cup \{0\})}$$

- Если $S_1 \subseteq S_2$, то $S_2^* \subseteq S_1^*$.

- $$\left(\bigcup_{i=1}^m S_i \right)^* = \bigcap_{i=1}^m S_i^*$$

- Если S - замкнуто, выпукло, включает 0, то $S^{**} = S$.

- $$S^* = (\overline{S})^*$$

Examples

1

Доказать, что $S^* = (\overline{S})^*$.

Решение:

- $$S \subset \overline{S} \rightarrow (\overline{S})^* \subset S^*$$

- Пусть $p \in S^*$ и $x_0 \in \overline{S}$, $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x) = p^T x$, имеем: $p^T x_k \geq -1 \rightarrow p^T x_0 \geq -1$. Значит, $p \in (\overline{S})^*$, отсюда $S^* \subset (\overline{S})^*$

2

Доказать, что $(\mathbf{conv}(S))^* = S^*$.

Решение:

- $$S \subset \mathbf{conv}(S) \rightarrow (\mathbf{conv}(S))^* \subset S^*$$

- Пусть $p \in S^*$, $x_0 \in \mathbf{conv}(S)$, т.е. $x_0 = \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in S, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$.

Значит, $p^T x_0 = \sum_{i=1}^k \theta_i p^T x_i \geq \sum_{i=1}^k \theta_i (-1) = 1 \cdot (-1) = -1$. Значит, $p \in (\mathbf{conv}(S))^*$, отсюда $S^* \subset (\mathbf{conv}(S))^*$

3

Доказать, что если $B(0, r)$ - шар радиуса r по некоторой норме с центром в нуле, то $(B(0, r))^* = B(0, 1/r)$.

Решение:

- Пусть $B(0, r) = X$, $B(0, 1/r) = Y$. Возьмем вектор нормали $p \in X^*$, тогда для любого $x \in X$: $p^T x \geq -1$.
- Из всех точек шара X возьмем такую $x \in X$, что скалярное произведение её на p : $p^T x$ было бы минимально, тогда это точка $x = -\frac{p}{\|p\|} r$

$$p^T x = p^T \left(-\frac{p}{\|p\|} r \right) = -\|p\| r \geq -1$$

$$\|p\| \leq \frac{1}{r} \in Y$$

Значит, $X^* \subset Y$.

- Теперь пусть $p \in Y$. Нам надо показать, что $p \in X^*$, т.е. $\langle p, x \rangle \geq -1$. Достаточно применить неравенство Коши - Буняковского:

$$\|\langle p, x \rangle\| \leq \|p\| \|x\| \leq \frac{1}{r} \cdot r = 1$$

Последнее исходит из того, что $p \in B(0, 1/r)$, а $x \in B(0, r)$.

Значит, $Y \subset X^*$.

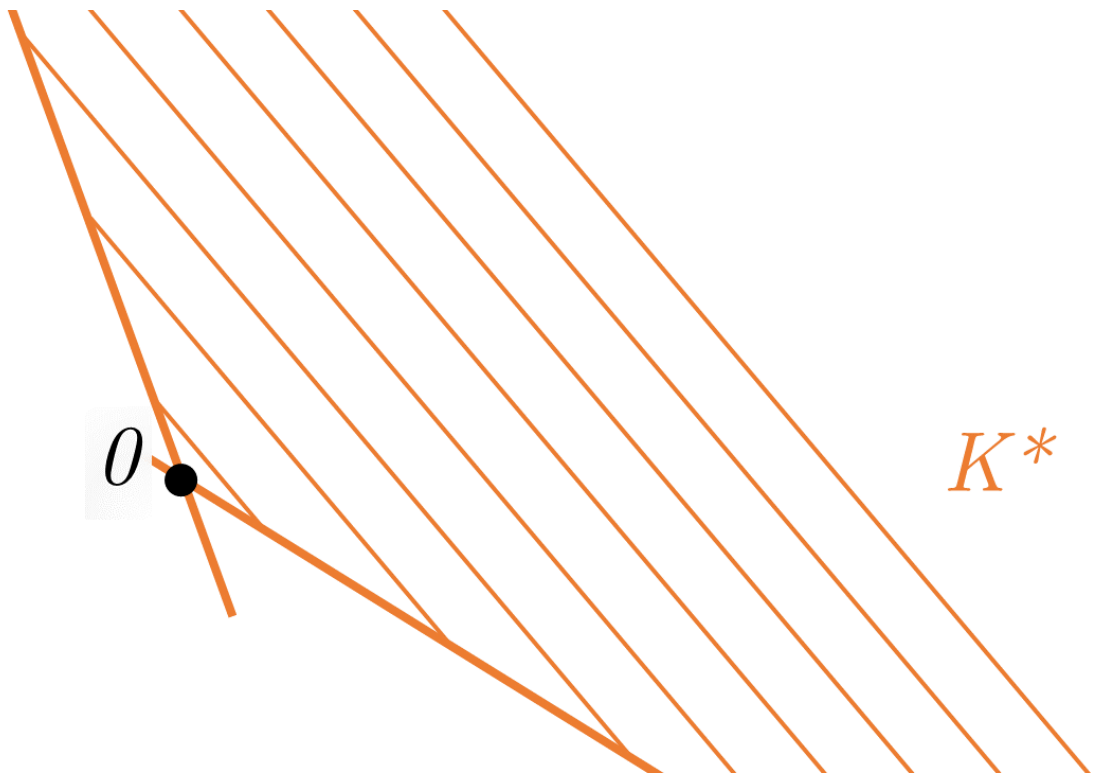
Dual cones

Сопряженным конусом к конусу K называется такое множество K^* , что:

$$K^* = \{y \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}$$

Чтобы показать, что это определение непосредственно следует из теории выше, вспомним, что такое сопряженное множество и что такое конус $\forall \lambda > 0$

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall x \in S\} \rightarrow \{\lambda y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -\frac{1}{\lambda} \quad \forall x \in S\}$$



Dual cones properties

- Пусть K - замкнутый выпуклый конус. Тогда $K^{**} = K$.
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и конуса $K \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$(S + K)^* = S^* \cap K^*$$

- Пусть K_1, \dots, K_m - конусы в \mathbb{R}^n , тогда:

$$\left(\sum_{i=1}^m K_i \right)^* = \bigcap_{i=1}^m K_i^*$$

- Пусть K_1, \dots, K_m - конусы в \mathbb{R}^n . Пусть также их пересечение имеет внутреннюю точку, тогда:

$$\left(\bigcap_{i=1}^m K_i \right)^* = \sum_{i=1}^m K_i^*$$

Examples

Найти сопряженный конус для монотонного неотрицательного конуса:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$$

Решение:

Заметим, что:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = y_1(x_1 - x_2) + (y_1 + y_2)(x_2 - x_3) + \dots + (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})(x_n -$$

Так как в представленной сумме в каждом слагаемом второй множитель неотрицательный, то:

$$y_1 \geq 0, \quad y_1 + y_2 \geq 0, \quad \dots, \quad y_1 + \dots + y_n \geq 0$$

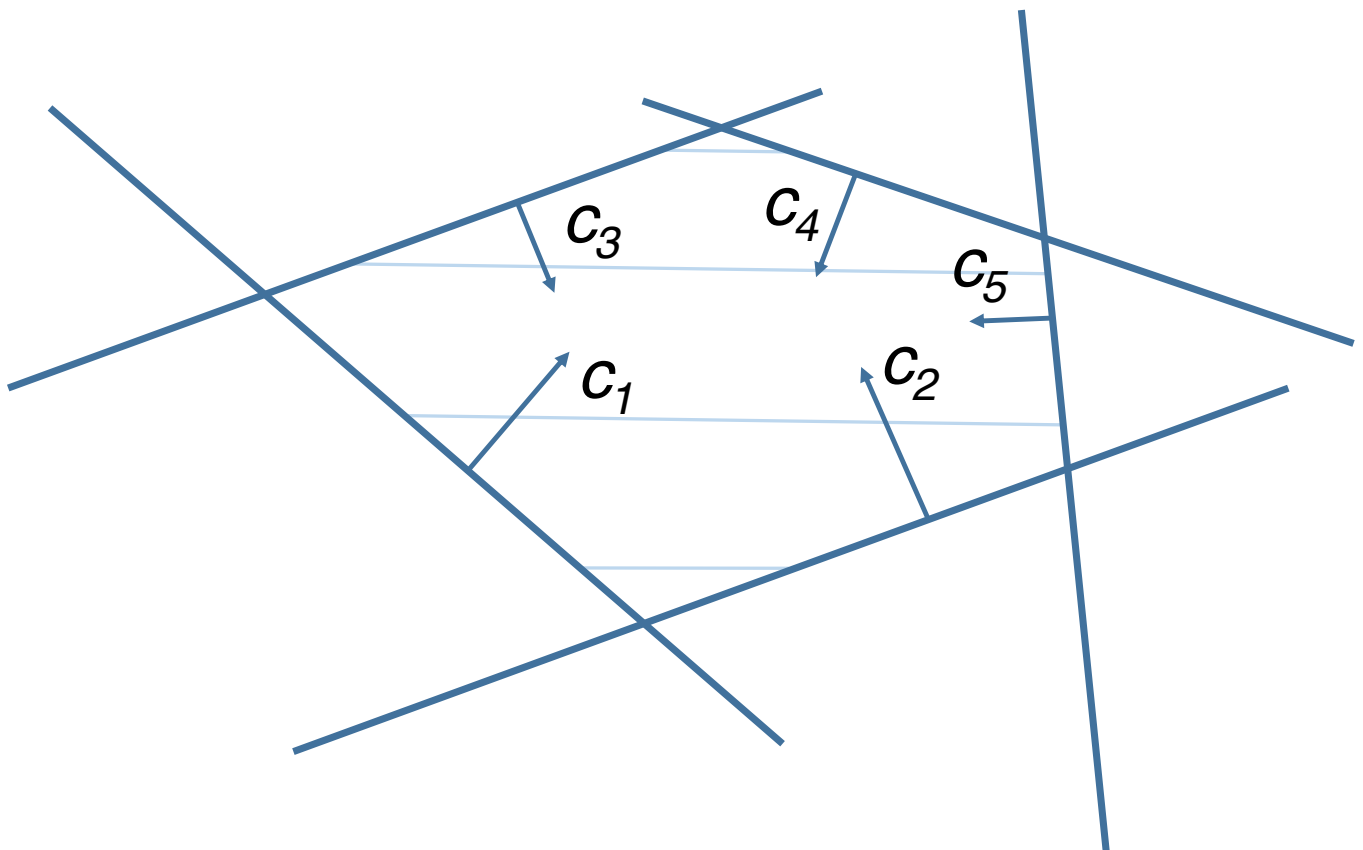
$$\text{Значит, } K^* = \left\{ y \mid \sum_{i=1}^k y_i \geq 0, k = \overline{1, n} \right\}$$

Polyhedra

Множество решений системы линейных неравенств и равенств представляет собой многогранник:

$$Ax \preceq b, \quad Cx = d$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, а неравенство - поэлементное.



ТЕОРЕМА:

Пусть $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к многогранному множеству:

$$S = \mathbf{conv}(x_1, \dots, x_k) + \mathbf{cone}(x_{k+1}, \dots, x_m)$$

является полиэдр (многогранник):

$$S^* = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1, k}; \langle p, x_i \rangle \geq 0, i = \overline{k+1, m}\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

- Пусть $S = X, S^* = Y$. Возьмем некоторый $p \in X^*$, тогда $\langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1, k}$. В то же время для любых $\theta > 0, i = \overline{k+1, m}$:

$$\langle p, x_i \rangle \geq -1 \rightarrow \langle p, \theta x_i \rangle \geq -1$$

$$\langle p, x_i \rangle \geq -\frac{1}{\theta} \rightarrow \langle p, x_i \rangle \geq 0$$

Значит, $p \in Y \rightarrow X^* \subset Y$.

- Пусть, напротив, $p \in Y$. Для любой точки $x \in X$:

$$x = \sum_{i=1}^m \theta_i x_i \quad \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$$

Значит:

$$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^m \theta_i \langle p, x_i \rangle = \sum_{i=1}^k \theta_i \langle p, x_i \rangle + \sum_{i=k+1}^m \theta_i \langle p, x_i \rangle \geq \sum_{i=1}^k \theta_i (-1) + \sum_{i=1}^k \theta_i \cdot$$

Значит, $p \in X^* \rightarrow Y \subset X^*$.

5

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу:

$$S = \mathbf{cone} \{(-3, 1), (2, 3), (4, 5)\}$$

Решение:

Используя теорему выше:

$$S^* = \{-3p_1 + p_2 \geq 0, 2p_1 + 3p_2 \geq 0, 4p_1 + 5p_2 \geq 0\}$$

Лемма (теорема) Фаркаша (Фаркаша - Минковского)

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из

следующих двух систем:

$$1) Ax = b, x \geq 0$$

$$2) p^T A \geq 0, \langle p, b \rangle < 0$$

$Ax = b$ при $x \geq 0$ означает, что b лежит в конусе, натянутом на столбцы матрицы A .

$pA \geq 0, \langle p, b \rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором b и конусом из столбцов матрицы A .

СЛЕДСТВИЕ:

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$$1) Ax \leq b$$

$$2) p^T A = 0, \langle p, b \rangle < 0, p \geq 0$$

Если в задаче линейного программирования на минимум допустимое множество непусто и целевая функция ограничена на нём снизу, то задача имеет решение.
